Литература

1. Малашонок Г.И., Лапаев А.О., Пирютин И.А. Быстрое умножение в кольце целых чисел // Вестник Тамбовского униврерститета. Серия: Естественные и технические науки. Тамбов, 2007. Т. 12. Вып.1. С. 130.
2. Кнут Д. Искусство программирования, М., СПб.; Киев, 2004. Т. 2.

Поступила в редакцию 15 декабря 2007г.

Вычисление комплексных корней полиномов

© **Г.И.Малашонок** , © **А.А.Бетин**

Предлагается метод вычисления комплексных корней полиномов. Особенностью метода является то, что задача сводится к вычислению действительных корней полиномов, все остальные вычисления являюся точными символьно-численными.

Дан полином над полем комплексных чисел степени n

$$f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + ... + a_n z + a_{n+1}. \tag{1}$$

Задача состоит в нахождении всех корней уравнения

$$f(z) = 0$$

с заданной точностью E. E – это максимальная по модулю абсолютная ошибка вычисления действительной и мнимой части каждого корня.

Вычисление корней полинома проведем в два этапа. Сначала разложим многочлен на множители, не содержащие кратных корней, а затем найдем все корни каждого из сомножителей.

Лемма 1.

Существует алгоритм разложения полинома на множители свободные от квадратов с использованием только точных символьно-численных операций.

Доказательство.

Рассмотрим полином над полем комплексных чисел

$$f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + ... + a_n z + a_{n+1}.$$

Этот полином имеет n комплексных корней, с учетом их кратности, поэтому может быть записан в виде

$$f(z) = a_0 \prod_{j=1}^{t} (z - z_j)^{m_j}, \ \sum_{j=1}^{t} m_j = n,$$

где m_j - кратность корня z_j.

Введм некоторые обозначения. Пусть $I = \{1, \cdots, t\}$ - множество номеров несовпадающих корней. Пусть среди чисел m_j $(j = 1 \cdots t)$ встречается s различных натуральных чисел $n_1, n_2, \cdots, n_s, n_1 < n_2 < n3 < \cdots < n_s$. Выделим подмножества корней, имеющих одинаковую кратность: $N_i \subset I$, $N_i = \{j : \ z_j$ - корень кратности $n_i\}$. Получим разбиение множества I на подмножества $I = \bigsqcup_{i=1}^{s} N_i$. Введем функцию k_i, определенную для $1 \le i \le n_s$, которая указывает на наименьшее из чисел n_h, которое не меньше чем натуральное i:

$$k_i = \min_{n_h \ge i} h. \tag{$*$}$$

Пусть f_i – это сомножители f, которые требуется найти и которые не имеют кратных корней. Мы ищем следующее разложение полинома $f(z)$ на сомножители:

$$f(z) = \prod_{i=1}^{s} f_i^{n_i}, \;\; f_i = \prod_{j \in N_i} (z - z_j).$$

Рассмотрим алгоритм вычисления f_i.

Вычислим производную полинома f:

$$f' = f_1^{n_1-1} f_2^{n_2} f_3^{n_3} \cdots f_s^{n_s} + f_1^{n_1} f_2^{n_2-1} f_3^{n_3} \cdots f_s^{n_s} + \cdots + f_1^{n_1} f_2^{n_2} \cdots f_{s-1}^{n_s-1} f_s^{n_s-1}.$$

Обозначим наибольший общий делитель функции f и ее производной:

$$\phi_1 = GCD(f; f') = f_1^{n_1-1} f_2^{n_2-1} \cdots f_s^{n_s-1}.$$

Найдем $\phi_2 = GCD(\phi_1; \phi_1')$ и запишем в виде

$$\phi_2 = \prod_{i \geq k_2} f_i^{n_i-2},$$

где k_i определена в (*). Продолжим вычисления и для $2 < p < n_s$ получим:

$$\phi_p = GCD(\phi_{p-1}; \phi_{p-1}') = \prod_{i \geq k_p} f_i^{n_i-p}.$$

Легко видеть, что $\phi_{n_s-1} = f_s$, причем показатель степени у f_s, с которым он входит в исходный полином $f(z)$, равен n_s – числу производных.

Обозначим $g_{n_s} = f_s$. Для вычисления остальных сомножителей $f_1 \cdots f_{s-1}$ предварительно вычислим все сомножители:

$$g_{n_s-1} = \frac{\phi_{n_s-2}}{g_{n_s}^2}, \;\; g_{n_s-2} = \frac{\phi_{n_s-3}}{g_{n_s}^3 g_{n_s-1}^2}, \;\; ...,$$

$$g_{n_s-k} = \frac{\phi_{n_s-k-1}}{g_{n_s-k+1}^2 g_{n_s-k+2}^3 \cdots g_{n_s}^{k+1}}, \;\; ..., \;\; g_0 = \frac{\phi_0}{g_1^2 g_2^3 \cdots g_{n_s}^{n_s}}.$$

В последовательности $g = \{g_0, g_1, \cdots, g_{n_s}\}$ могут быть не только полиномы, но и константы. Если из нее вычеркнуть все константы, то получим последовательность полиномов $\{f_1, f_2, \cdots, f_s\}$ и при этом f равно произведению $f = f_1^{n_1} f_2^{n_2} \cdots f_s^{n_s}$ и каждая функция $f_t = g_p$ входит в произведение в степени p. Таким образом, получено разложение полинома на сомножители, несодержащие кратных корней. Лемма доказана.

Главный результат настоящей работы содержится в следующем утверждении.

Лемма 2.

Пусть полином $f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + ... + a_n z + a_{n+1}$ не имеет кратных корней в $\mathbb{C}$, тогда все его корни можно найти, используя точные символьно-численные операции и операции нахождения действительных корней полиномов от одной переменной.

Доказательство.

Рассмотрим полином над полем комплексных чисел, который не имеет кратных корней.

$$f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + ... + a_n z + a_{n+1}. \tag{2}$$

Требуется найти все корни уравнения

$$f(z) = 0. \tag{3}$$

с заданной точностью E. E – это максимальная по модулю абсолютная ошибка вычисления действительной и мнимой части каждого корня.

Выделим у коэффициентов и неизвестного $z = x + iy$ действительную и мнимую часть, и представим функцию $f(z)$ как сумму ее мнимой и действительной части. Тогда задача сводится к решению системы уравнений, которая получена приравниванием действительной и мнимой части полинома к нулю.

Обозначим

$$Re(f(z)) = \phi_0(x,y),$$

$$Im(f(z)) = \phi_1(x,y).$$

Тогда система будет иметь вид:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \phi_0(x,y) & = & 0, \\ \phi_1(x,y) & = & 0. \end{array} \right. \tag{4}$$

Система (4) - это система состоящая из 2-х алгебраических уравнений с 2-мя неизвестными.

Рассмотрим идеал $Id = (\phi_0, \phi_1) \subset R[x,y]$, порожденный ϕ_0 и ϕ_1. Каждое решение системы (4) обращает в ноль любой элемент идеала Id.

Построим последовательность полиномиальных остатков по следующей схеме. Будем считать, что y - старшая переменная и будем рассматривать полиномы в кольце $R[x][y]$. Обозначим через $deg_y\ \phi_i$ степень полиома ϕ_i по переменной y. Пусть для определенности $deg_y\ \phi_1$ не превосходит $deg_y\ \phi_0$. Тогда множно построить последовательность полиномиальных остатков по следующей схеме:

$$\alpha_1\phi_0 + \beta_1\phi_1 = \phi_2,$$

$$\alpha_2\phi_1 + \beta_2\phi_2 = \phi_3,$$

$$\cdots$$

$$\alpha_m\phi_{m-1} + \beta_m\phi_m = \phi_{m+1},$$

где $\alpha_i \in R[x],\ \beta_i \in R[x,y]$ выбираются так, чтобы выполнялось условие $deg_y\ \phi_i > deg_y\ \phi_{i+1},\ i = 1, 2, \cdots, n$. Операция вычисления ϕ_i на шаге i называется операция псевдоделения. Нетрудно видеть, что найденные таким образом ϕ_i находятся в идеале Id.

Аналогично можно поступить, считая x старшей переменной и рассматривая $\phi_i \in R[y][x]$.

Пусть в результате этих вычислений были получены многочлены $f_1(x,y)$ и $f_2(x,y)$, как последние ненулевые остатки. Полиномы f_1 и f_2 могут отличаться соответственно "лишними"сомножителями $\lambda(x)$ и $\mu(y)$, которые возникают из-за операций псевдоделения. Поэтому в общем случае полиномы f_1 и f_2 имеют вид:

$$f_1(x,y) = \phi(x,y)\eta(x)\theta(y)\lambda(x), \tag{5}$$

$$f_2(x,y) = \phi(x,y)\eta(x)\theta(y)\mu(y), \tag{6}$$

где $\phi(x,y)$ не содержит сомножителей зависящих только от x или только y. Покажем, как найти каждый самножитель, Рассмотрим $f_1(x,y)$. Считая y старшей переменной, вынесем общий множитель коэффициентов при y - полиномы от x, таким образом

$$f_1(x,y) = Q(x,y)\alpha(x).$$

Теперь, считая в $Q(x,y)$ x старшей переменной, вынесем общий множитель при x - полином от y, получим:

$$f_1(x,y) = \phi(x,y)\alpha(x)\theta(y).$$

Поступая аналогично с функцией $f_2(x,y)$, только сначала считая x старшей переменной, а потом y, получим:

$$f_2(x,y) = \phi(x,y)\beta(y)\eta(x).$$

Вычислим

$$\lambda(x) = \frac{\alpha(x)}{\eta(x)} \Rightarrow \alpha(x) = \lambda(x)\eta(x),$$

$$\mu(y) = \frac{\beta(y)}{\theta(y)} \Rightarrow \beta(y) = \mu(y)\theta(x).$$

Таким образом, получаем все сомножители в выражениях (5) и (6). Отметим, что $\eta(x)$ и $\theta(y)$ не имеют действительных корней, так как иначе система (4) имела бы бесконечно много решений.

Пусть $z = x + iy$ решение (2), тогда $\phi(x, y)\lambda(x) = 0$ и $\phi(x, y)\mu(y) = 0$. Рассматривая все пары (x, y), найдинные с точностью E, такие, что $\lambda(x) = 0$ и $\mu(y) = 0$, выбирем из них те, для которых:

$$\begin{cases} \phi_0(x,y) &= 0, \\ \phi_1(x,y) &= 0. \end{cases}$$

Это будут корни уравнения (2). Если таких корней получено n штук, то задача решена.

Если таких пар меньше чем n и еще требуется найти недостающий n_1 корень, то это означает, что ненайденные искомые корни являются корнями уравнения

$$\phi(x, y) = 0.$$

Функция $\phi(x, y)$ - непрерывна, бесконечное число раз дифференциируема и имеет конечное число точек (x, y), в которых она обращается в ноль. Следовательно, эти точки находятся в экстремумах этой функции. Поэтому они являются решениями системы

$$\begin{cases} \phi_0(x,y) &= 0, \\ \phi_x(x,y) &= 0, \end{cases}$$

если $\phi_x \neq 0$, или системы

$$\begin{cases} \phi_0(x,y) &= 0, \\ \phi_y(x,y) &= 0, \end{cases}$$

если $\phi_y \neq 0$. Функции ϕ_x и ϕ_y частные производные по x и y соответственно, не могут одновременно обращаться в ноль, так как в этом случае функция $\phi(x, y) = const$.

Таким образом, получена система 2-х алгебраических уравнений от 2-х переменных и эта система имеет конечное число решний. Искать решения этой системы будем аналогично тому, как искали решения системы (4). Если таким образом не все из n_1 решений получены, то продолжим этот процесс дальше.

Отметим, что если одна из функций ϕ_x или ϕ_y является функцией только одной переменной, то мы можем найти все ее действительные корни, подставить их в ϕ, решить уравнение $\phi = 0$ относительно другой переменной и тем самым найти все пары (x, y), в которых $\phi(x, y) = 0$.

Так как ϕ имеет общую степень непревосходящую $\min deg(\phi_1, \phi_0)$, а ϕ_x и ϕ_y имеют общую степень строго меньше чем ϕ, то такой процесс завершится в конечное число шагов и будут найдены все n решений уравнения (2). Лемма доказана.

Эти леммы позволяют сформулировать следующую теорему.

Теорема.

Существует алгоритм вычисления всех комплексных корней полинома (1) с учетом их кратности, который использует только точные символьно-численные операции и операции нахождения действительных корней полиномов от одной переменной.

Доказательство.

Доказательство содержится в леммах 1 и 2.

В леммах 1 и 2 содержится алгоритм нахождения всех комплексных корней полинома. На основе этого алгоритма была создана Java-программа. С этой программой проводились эксперименты. В следующей главе приведены некоторые простые примеры вычисления всех комплексных корней полиномов. Расчеты проводились в среде JDK 1.5.

Литература

1. Малашонок Г.И., Бетин А.А. О вычислении комплексных корней полиномов. Вестник ТГУ. Том 12, вып. 1, 2007.

2. Лунц Г.Л Эльсгольц Л.Э. Функции комплексного переменного: Учебник для вузов. 2-е изд. – СПб. 2002.

3. И.И. Привалов. Введение в теорию функций комплексного переменного. М. 1954.

4. Сидоров Ю.В., Федорюк М.В., Шабунин М.И. Лекции по теории функций компекного переменного. 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Наука. 1982.

Поступила в редакцию 15 декабря 2007г.